CUM PUTEM FACE COMPLEXITATEA SĂ NU FIE COMPLICATĂ?

Autor: Andrei Marin | 18 decembrie 2022

În domeniile care presupun modelarea matematică a unor fenomene, rezultatul ideal pentru un cercetător este o relație matematică simplă din care să poată obține mărimile de interes. Nu prea contează în economia discuției care sunt aceste mărimi, căci formalismul matematic transformă problema într-una abstractă. De aceea, toată greutatea apasă pe termenul „simplu“, care este mult mai greu de definit decât pare.

Asocierile imediate pe care le facem când ne gândim la simplitate sunt, cel mai adesea, restrictive din punctul de vedere al analizei unui model matematic. Pentru că simplitatea poate implica despre un model că nu este complex, că nu este complicat sau că nu este nici complex, nici complicat. Dacă expunerea de până acum nu induce suficient de tare în ceață, trebuie să spunem că nici termenii „complex“ și „complicat“ nu sunt neapărat definiți riguros.

Înainte de a discuta despre termenii aceștia în accepțiunea pe care le-am dat-o în acest text, atrag atenția că delimitările mele nu sunt neapărat uzuale și că au fost făcute pentru a evidenția anumite idei. Pentru complexitatea sistemelor s-au oferit tot felul de criterii și clasificări. Evadarea acestor termeni din jargonul științelor exacte și pătrunderea lor în zona afacerilor sau a gândirii strategice aduce un deserviciu demersurilor de sistematizare a definițiilor. De multe ori, se consideră că un sistem complicat este în principiu determinabil, dificultățile fiind exclusiv de natură practică[1]. Exemplele care urmează elucidează în bună măsură principalele asemenea dificultăți. În ceea ce privește complexitatea, nici măcar posibilitatea elaborării unei definiții nu este unanim acceptată. Uneori se pleacă de la ideea că sistemele complexe merg cu un pas mai departe de sistemele complicate, în sensul în care nu se mai poate determina în principiu evoluția lor.

Vom prezenta însă pe parcursul acestui text exemple de sisteme complexe care, printr-o tratare matematică adecvată, ajung să aibă descrieri simple, adică nici măcar complicate. Bineînțeles, este posibilă și o descriere simplă a unor sisteme complicate.

Problema este una de metodă, în sensul în care diferite tehnici matematice, cărora le putem găsi tot felul de semnificații, pot fi folosite în funcție de forma concretă a sistemului în discuție. În text, termenii „complex“ și „complicat“ vor fi introduși oarecum naiv. În esență, deși această explicație este evident nesatisfăcătoare, în sistemele complexe apar anumite comportamente de ansamblu, rezultate din interacțiunea componentelor sistemului[2].

Să ne imaginăm un joc de biliard în care un jucător sparge violent pachetul de bile. Mișcarea bilelor până la oprire poate fi considerată complicată? Probabil că primul instinct ar fi să răspundem afirmativ la această întrebare. Pot însă oferi un argument simplu pentru a reconsidera răspunsul: există o puzderie de jocuri video care simulează biliardul. Cu alte cuvinte, respectiva mișcare nu este chiar atât de complicată încât să nu poată fi simulată (și încă destul de ușor). Rămâne doar să decidem în privința complexității. Aici putem raționa astfel: ce trebuie să știm (noi sau jocul video) pentru a prezice cu acuratețe rezultatul lovirii? Remarcăm cum ne ajunge să cunoaștem – referindu-ne la mărimile fizice implicate – poziția inițială a bilelor, punctul în care lovim bila albă cu tacul, viteza pe care o imprimăm la lovire și câțiva parametri ai sistemului: frecări, pierderi de energie la ciocnirea bilelor între ele sau cu manta etc. Parametrii aceștia sunt numeroși, însă nu astfel încât să pună probleme serioase. Mai mult decât atât, caracterul liniar al legilor mecanicii ne asigură că din interacțiunea părților sistemului nu vor rezulta termeni noi în ecuații. Altfel spus, ciocnirea a două bile nu afectează direct o a treia bilă izolată de primele două. Vom reveni la liniaritate în partea finală a textului.

Dacă jocul de biliard nu este nici simplu, nici complicat, să trecem la nivelul următor: gazul dintr-o încăpere izolată. Particulele ce alcătuiesc gazul sunt extrem de numeroase: într-un metru cub de gaz sunt mai multe particule decât vârsta Universului exprimată în secunde. Totuși, legile pe care le respectă sunt aceleași ca la jocul de biliard. Sistemul nu este complex, însă cu siguranță este complicat. Mult prea complicat pentru a fi simulat pe computer. Să fie acesta un etalon pentru sarcinile cu adevărat complicate? În practică, desigur că atunci când nu putem simula ceva pe computer, vom căuta o metodă să obținem altcumva informații despre sistemul studiat. Însă alegerea unui computer (instrument de putere crescândă de la an la an) drept etalon este un criteriu nesatisfăcător atât pentru un matematician, cât și pentru un filosof.

O soluție la această problemă presupune să nu mai descriem propriu-zis sistemul ca un ansamblu de particule care se mișcă într-o încăpere izolată. Putem la fel de bine considera că fiecare particulă se mișcă într-un spațiu hexadimensional. Trei dimensiuni sunt reprezentate de coordonatele în cele trei direcții ale spațiului, iar celelalte trei, de vitezele în respectivele direcții. Acest spațiu se cheamă spațiul configurațiilor. Dacă nu ne interesează decât coordonatele particulelor, putem să ne mulțumim cu spațiul fazelor, care cuprinde coordonatele de poziție independente de care avem nevoie. De

exemplu, dacă studiem orbita unei planete în jurul Soarelui, ne trebuie – într-un model simplu – distanța Soare-planetă și unghiul făcut de dreapta ce le unește cu o anume dreaptă de referință. Altfel spus, planeta poate fi considerată ca mișcându-se într-un spațiu în care una dintre dimensiuni este de fapt un unghi.

Revenind la ansamblul de particule, putem calcula dimensiunea unuia dintre aceste spații pentru întregul sistem. Rezultatul enorm ne convinge că este într-adevăr complicat de descris acest sistem: sunt foarte multe ecuații, care vor da foarte multe răspunsuri: la ce bun dacă particulele sunt echivalente între ele? Din asemenea considerente, o incintă închisă care conține un gaz poate fi descrisă într-un spațiu al fazelor cu numai doi parametri: presiunea și temperatura. Această simplificare se bazează pe echivalența statistică a particulelor care alcătuiesc gazul și este avantajoasă tocmai pentru că nu ne interesează să știm mai mult de atât. Caracterul complicat a fost eliminat cu desăvârșire.

O întrebare suplimentară sună astfel: este mișcarea bilelor de biliard haotică? Deși avem de a face cu un model determinist (cunoașterea stării inițiale garantează cunoașterea oricărei stări viitoare), răspunsul este afirmativ: argumentul pleacă de la diferența enormă pe care o provoacă orice schimbare a condițiilor inițiale (viteza și direcția bilei albe). Iar cum repetarea perfectă în practică a unor condiții inițiale identice este imposibilă chiar și în jocurile video, trebuie să ne așteptăm ca și rezultatele să se schimbe semnificativ de la o simulare la alta. Dar dacă am juca un joc video în care am scrie valoarea fiecărui parametru, având deci un control total, rezultatul fiecărei simulări ar fi identic.

Modelarea matematică caută simplitatea prin diverse tehnici. Am prezentat deja analiza statistică a unui sistem. O altă tehnică o reprezintă neglijarea acelor parametri care sunt nesemnificativi pentru un anume tip de analiză[3]. De exemplu, orice obiect atârnat de o funie este un caz particular al pendulului lui Foucault (experimentul din Pantheonul din Paris). Însă cum precesia completă a unui asemenea pendul durează mai mult de o zi, o analiză pe durata a câteva secunde (cât durează ca oscilația să se amortizeze) o poate ignora cu succes. Desigur, această formă de simplificare nu este nici pe departe cea mai relevantă cucerire științifică. Degeaba reducem numărul dimensiunilor asociate unui sistem complex dacă nu știm să tratăm complexitatea sa în sine.

Din fericire, avem instrumente inclusiv la acest nivel. Să luăm aici ca exemplu problema mișcărilor planetelor în jurul Soarelui. În cazul cel mai simplu, în care interacțiunea se produce numai între planetă și Soare, traiectoriile (orbitele) sunt eliptice. În realitate, influența gravitațională a altor corpuri, precum este planeta Jupiter (cea mai masivă planetă), alterează mișcarea eliptică. Deși putem simula computerizat aceste interacțiuni (lucru altminteri destul de complicat din punct de vedere computațional[4]), s-au căutat soluții analitice pentru problemele de acest tip. Mai întâi s-a decis eliminarea

acelor influențe gravitaționale care sunt mai mici decât eroarea maximă pe care o admitem în predicțiile noastre. Apoi, și în acest punct intervine elementul prin care gestionăm complexitatea, s-au separat evoluțiile sistemului în două scări de timp. Prima se referă la mișcarea planetei pe orbită și are o perioadă scurtă (un an), respectiv o frecvență mare. A doua vizează schimbarea în timp a parametrilor orbitei (distanța medie Soare-planetă, de pildă) și are o perioadă mult mai mare (poate zeci sau sute de mii de ani), respectiv o frecvență mult mai mică.

Astfel pusă problema, prin considerarea unei medii a evoluției determinate de frecvența mare, putem scrie niște ecuații care să descrie evoluția sistemului pe frecvența mică, aceea care ne interesează de fapt. Asemenea instrumente matematice i-au permis lui Pierre Simon de Laplace să propună explicații pentru însăși stabilitatea sistemului solar, pe care Newton o pusese pe seama intervenției constante a lui Dumnezeu[5]. În această cheie trebuie citit și legendarul dialog dintre Napoleon și Laplace, în care cel din urmă spunea că nu a avut nevoie de ipoteza Divinității în al său *Traité de mécanique céleste*. Un alt element explicat de Laplace este existența unor rapoarte surprinzătoare între perioadele orbitale ale unor sateliți sau planete. Deși ne-am putea aștepta ca împărțind perioadele principalilor sateliți ai lui Jupiter între ele să obținem numere fără nicio semnificație, remarcăm cum suntem extrem de aproape de rapoarte de numere naturale. Pentru lunile Io, Europa și Ganymede raportul aproximativ este 1:2:4. Asemenea rapoarte cauzează lipsa anumitor inele în jurul lui Saturn, fapt ușor de observat în fotografii.

Semnificația acestui fenomen, denumit generic rezonanță orbitală, este de naștere a ordinii în acest sistem complex. Fenomenul este caracteristic și multor alte sisteme, însă am preferat să ofer un exemplu concret în locul expunerii teoretice relativ anevoioase. Se poate întrucâtva spune că armonia aristotelică a sferelor își găsește un corespondent și o motivație în astrofizica modernă[6]. Revenind la discuția despre metodă, vedem cum, dintr-un sistem în care cel mult puteam simula cum toată lumea „trage“ (prin atracția gravitațională) de toată lumea, am reușit să surprindem tendințe de autoorganizare care nu subminează în niciun caz caracterul complex al sistemului. Altfel spus, am reușit să găsim o formă de complexitate pe care o putem face să nu fie complicată.

O cauză frecventă pentru complexitate o constituie neliniaritatea anumitor ecuații diferențiale, adică apariția unor puteri mai mari decât 1 a necunoscutelor. Dificultatea comparativă a acestor tipuri de ecuații apare din caracterul nesuperpozabil al soluțiilor lor. În acest caz, suma a două soluții ale ecuației nu este, la rândul ei, soluție a ecuației. Ecuațiile mecanicii clasice, pe de altă parte, sunt superpozabile: mișcarea perturbată a unei planete în jurul Soarelui se compune dintr-o mișcare neperturbată și un termen care caracterizează perturbațiile. Această înlocuire nu mai funcționează așa ușor la o ecuație neliniară. În plus, ecuațiile neliniare depind într-unele cazuri foarte puternic de condițiile inițiale. În alte cazuri, acestea au niște comportamente foarte interesante în

spațiul fazelor, în care traiectoria sistemului poate să orbiteze în jurul unui punct de stabilitate. Acest tip de sisteme complexe se dezvăluie ca având o noimă internă atunci când este folosită o metodă optimă de studiu. Iar căutarea acestora este un efort permanent care antrenează foarte mulți cercetători.

Pentru că nu este fezabil să studiem propriu-zis asemenea sisteme, mă voi limita la un exemplu în care matematica poate să arate niște concluzii „de bun-simț". Pentru un sistem care modelează interacțiunea dintre pradă și prădător într-un areal[7], spațiul fazelor – adică spațiul mărimilor de interes – conține numărul exemplarelor de pradă, respectiv de prădător. Așezând într-un grafic punctele corespunzând acestor numere la diferite momente de timp, obținem niște orbite ce au ca centru tocmai punctul de echilibru al sistemului, adică punctul în care și prada, și prădătorul își mențin populația constantă. Existența unui asemenea punct este de așteptat, la fel cum este de așteptat existența unor orbite stabile, adică a unor evoluții în care nu dispar nici prada, nici prădătorul. Evident, modelul este o idealizare grosolană (consideră o singură pradă pentru un singur prădător, alături de alte presupuneri), dar concluziile matematice se suprapun cu observațiile elementare pe care le putem face în natură.

Acest articol nu face decât să atingă câteva dintre problemele de fizică și matematică aplicată în care cunoașterea unui număr mare de metode este de ajutor. Dincolo de popularizarea explicită a anumitor teorii științifice sau a unor modele în sine, cred că și metodele concrete de lucru ale științei merită să fie expuse public. Căci activitatea unui cercetător într-unul dintre aceste domenii implică – în felul său temperat de rațiune și sistematizare – o anume doză de creativitate.

NOTE

1. Trebuie ținut cont că terminologia de specialitate provine din limba engleză, unde există particularități de uz întrucâtva diferite pentru *complicated*. De asemenea, mai există și termenul *complicatedness*, care ar putea desemna cât de complicat este un sistem, inclusiv printr-o descriere matematică. Acestui termen nu-i găsim însă un corespondent uzual în limba română, ceea ce îngreunează demersul adaptării terminologiei. ↑
2. Pe parcursul acestui paragraf m-am referit la descrierile simple dintr-o perspectivă pragmatică, a comodității utilizării, tocmai deoarece nu avem nicio definiție pentru simplitate (și nici nu putem avea în absența unei definiții pentru complexitate). Două tratări accesibile și de ansamblu ale subiectului sunt disponibile la Herbert A. Simon – *How Complex are Complex Systems?*, articol disponibil la How Complex are Complex Systems? on JSTOR și la James Ladyman și Karoline Wiesner – *What Is a Complex System?*, Yale University Press, 2020. ↑

3. Neglijarea în fizică nu trebuie asimilată unei omisiuni. Mai degrabă avem de a face cu abilitatea de a distinge semnificativul într-un ansamblu de mărimi. Din acest motiv, neglijările se fac pur circumstanțial și având la dispoziție posibilitatea matematică de a estima eroarea pe care acestea o introduc. ↑
4. Dar, spre deosebire de cazul particulelor unui gaz, nici pe departe imposibil. Într-un computer obișnuit, procesorul grafic este cel în responsabilitatea căruia revin sarcinile de acest tip. Astfel, unul dintre testele efectuate pentru compararea diferitelor modele presupune tocmai asemenea simulări (cunoscute în limbajul de specialitate ca *N-body simulations*). ↑
5. Bineînțeles, lucrările lui Laplace nu sunt decât baza tentativelor de a explica dinamica sistemului solar. Astăzi se admite în general că sistemul solar este la limita dintre stabilitate și haos, însă scara de timp la care s-ar manifesta acest comportament este de ordinul de mărime al vieții Soarelui. Simplu spus, din cauza îmbătrânirii Soarelui, sistemul solar își va înceta existența în forma actuală înainte de a se manifesta eventuala sa instabilitate. O trecere în revistă a problemei este realizată de Renu Malhotra, Matthew Holman și Takashi Ito în *Chaos and stability of the solar system*, disponibil la Chaos and stability of the solar system | PNAS. ↑
6. Mai există și alte exemple de organizare în sistemul solar. O trecere în revistă a acestora este făcută de Nicola Scafetta în *The complex planetary synchronization structure of the solar system*, articol disponibil la 1405.0193.pdf (arxiv.org). ↑
7. Un asemenea sistem este descris de ecuațiile Lotka-Volterra. Aceste ecuații descriu și multe alte sisteme decât cele trofice, dar continuă să fie asociate cu scopul care le-a consacrat. Ca idee cronologică, aceste ecuații au început să fie studiate în perioada 1910-1925, cu aproximație. ↑

Imagine: Unsplash